Сравнительный анализ долгосрочных стратегий формирования портфеля ценных бумаг

Дорн Юрий

June 2014

1 Введение

В своей работе я рассмотрю несколько стратегий формирования портфелей ценных бумаг. Наибольший интерес представляет сравнение оптимального портфеля по Марковицу с робастным оптимальным портфелем ценных бумаг, с универсальным портфелем ценных бумаг, а также с разреженным портфелем, дублирующим оптимальный. Все последние стратегии формирования портфелей являются новыми и требовали для своего создания разработки совершенно новых подходов к моделированию риска и случайности, а также методик работы с ними. В дальнейшем будет более подробно обсуждаться каждый из указанных методов формирования портфеля ценных бумаг, здесь же приведем только самое общее описание указанных методов формирования ценных бумаг.

1.1 Оптимальный портфель Марковица

В оригинальной работе Марковица "Portfolio Selection"(Markowitz, 1952) предлагалось искать такой портфель ценных бумаг, который минимизирует риск портфеля при условии, что ожидаемая доходность портфеля остается на уровне не ниже некоторого порога, определенного инвестором. При этом в рассмотренной модели в качестве риска рассматривалась дисперсия портфеля ценных бумаг. Это приводило к задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями, которая допускает эффективное алгоритмическое решение. В своей работе Марковиц получил правила формирования портфеля на один период. При этом предолагалось, что в каждый последующий период задача поиска оптимального портфеля будет решена вновь, а сам портфель переформирован.

Некоторые из исследователей пытались также решать задачу формирования оптимального портфеля ценных бумаг для нескольких периодов. Как правило, для этого применялись методы динамического или стохастического программирования. В нашей работе мы не рассматриваем данные методы, так как они, как правило, не имеют эффективного алгоритмического решения.

В дальнейшем мы приведем математическую постановку задачи об определении оптимального портфеля ценных бумаг, укажем алгоритмы решения данной задачи и сравним эффективность данной стратегии с другими на примере данных с российского рынка акций.

1.2 Робастный оптимальный портфель

В 90-х годах Аркадий Немировский предложил методологию Робастной оптимизации. Смысл заключается в следующем. В предыдущем примере неопределенность о будущем цены ценной бумаги учитывалась через ожидаемую доходность бумаги и матрицу ковариаций доходностей бумаг. При этом влияние моментов более высокого порядка не учитывалось. Здесь также есть неявное предположение о том, что мы можем оценить среднюю доходность и ковариацию ценных бумаг. Также инвестор соглашался с тем, что с некоторой вероятностью он может понести даже очень большой убыток. С точки зрения же оптимизации, мы говорим о том, что наши ограничения "мягкие т.е. допускается их нарушение с маленькой вероятностью. В робастной оптимизации же ограничения в задаче оптимизации "жесткие". С точки зрения инвестора же речь идет о существовании некоторого уровня доходности (или риска портфеля), ниже (для риска, соответственно, выше) которого инвестор не согласен опускаться ни в каком случае. Это требует нового подхода к учету неопределенности. Например, считать, что доходность ценных бумаг и их матрица ковариаций принадлежат некоторому (выпуклому, замкнутому) множеству векторов и матриц. При этом концепция "решения"будет следующей. При построении робастного портфеля ценных бумаг мы будем искать такой портфель, который даже при "худшей"(для каждого портфеля свой "худший случай) реализации доходности и матрицы корреляций, удовлетворяет ограничениям инвестора. Такой портфель можно назвать робастно допустимым. После этого среди робастно допустимых портфелей ищется портфель с наилучшим значением целевой функции (максимальной доходностью или минимальным риском). Это решение и будет робастным оптимальным портфелем. Сама идея была предложена много ранее, однако только в работах Немировского были приведены подходы, позволяющие решать указанную задачу эффективно алгоритмически.

Легко видеть, что значение целевой функции, достигаемое на робастном оптимальном портфеле "хуже чем на оптимальном портфеле в смысле Марковица. Действительно, оба подхода предполагают одну и ту же целевую функцию, однако допустимое множество в робастном случае "уже"за счет жестких ограничений. Соответственно, робастно оптимальный портфель является более консервативным, чем оптимальный в смысле Марковица.

Логично задать вопрос, зачем же вообще робастный портфель рассматривать?

Оказывается, в отличие от оптимального портфеля в смысле Марковица, робастно оптимальный портфель устойчив к небольшим отклонениям реализовавшихся доходностей и матрицы корреляций от их ожидаемых значений.

Действительно, оптимальный портфель по Марковицу является оптимальным только для одной, конкретной реализации будущих доходностей и корреляций ценных бумаг, из которых формируется портфель, а именно когда реализованные и ожидаемые (в момент принятия решения) доходности и корреляции ценных бумаг совпадают. При этом даже небольшое отклонение реализованного вектора доходностей или матрицы корреляций от ожидаемых в момент принятия решения значений может привести к значительному ухудшению качества портфеля. Этого не происходит в случае робастного оптимального портфеля (если отклонения укладываются в заложенный уровень неопределенности). Можно сказать, что робастный оптимальный портфель в некотором смысле равномерно близок к целому семейству оптимальных в смысле Марковица портфелей.

В дальнейшем мы приведем математическую постановку задачи об определении робастного оптимального портфеля ценных бумаг, укажем алгоритмы решения данной задачи, приведем практическую реализацию данной стратегии и сравним ее эффективность с стратегией Марковица и другими стратегиями на примере данных с российского рынка акций.

1.3 Разреженный оптимальный портфель

При формировании портфеля ценных бумаг зачастую оказывается неудобно иметь дело с большим количеством ценных бумаг в портфеле. Это вдвойне неприятно, если требуется изменять портфель ценных бумаг слишком часто в связи с наличием очень волатильных акций. Одним из подходов к частичному решению данной проблемы является идея формирования разреженного (sparse) портфеля ценных бумаг, в некотором смысле "дублирующего"целевой портфель. Термин "разреженный"означает, что число входящих в портфель ценных бумаг невелико.

Легче всего это продемонстрировать на примере работы индексных фондов, откуда и пришла данная техника.

Напомним, индексные фонды имеют целью создание портфелей, чье поведение почти дублирует индекс. Если бы они просто копировали состав индекса, то потери на переформировании такого портфеля могли бы быть очень существенными, так как это потребовало бы большого числа операций (в худшем случае, число бумаг, входящих в индекс) с небольшими лотами. Было бы идеально, если бы можно сформировать портфель из небольшого числа ценных бумаг, динамика цены которого полностью дублировала бы динамику цены целевого портфеля. Это позволило бы вместо большого количества операций с небольшими лотами делать небольшое число операций (возможно, с большими лотами). Конечно, на практике это невозможно и за возможность сократить число бумаг в портфеле приходится "платить"возможным отклонением динамики цены симплицирующего портфеля от динамики целевого портфеля. Однако в некоторых случаях это, все таки, оказывается оправданным.

В дальнейшем мы приведем математическую постановку задачи об определении разреженного оптимального портфеля ценных бумаг, укажем алгоритмы решения данной задачи, приведем практическую реализацию данной стратегии и сравним ее эффективность с стратегией Марковица и другими стратегиями на примере данных с российского рынка акций.

1.4 Универсальный портфель ценных бумаг

В отличие от предыдущих стратегий формирования портфелей ценных бумаг, относящихся к типу "buy and hold универсальный портфель ценных бумаг, предложенный в работе (Cover. 91), относится к адаптивным стратегиям формирования портфеля.

Как уже отмечалось ранее, все стратегии формирования портфеля сильно зависят от того, как учитывать и моделировать неопределенность в будущем относительно динамики цен активов. Если предыдущие модели предполагали, что изменения в стоимости ценных бумаг имеют (или могут моделироваться) стохастическую природу, то в данном случае таких предположений не делается. Динамика цен базовых активов, из которых формируется портфель, может быть какой угодно и даже "играть против инвестора". При таком положении никакая статическая стратегия ("buy and hold") не имеет смысла, так как может реализоваться "самая худшая"ситуация для инвестора, или, что то же самое, наш портфель покажет наименьшую доходность среди всех других портфелей. При такой постановке имеет смысл рассмотреть адаптивные стратегии формирования портфеля.

Как было указано выше, старые определения "оптимальности"в такой постановке уже не имеют смысла. Если бы мы умели заглядывать в будущее, то на каждый следующий инвестиционный период мы могли бы сформировать оптимальный портфель с наибольшей доходностью из всех. На самом деле, мы бы вложили все доступные средства в ту акцию (или другую бумагу), которая показала наибольший рост. К сожалению, заглядывать в будущее мы не можем. Однако мы можем попытаться формировать портфель адаптивным образом так, чтобы полученный портфель показывал долгосрочную доходность почти такую же, как самый лучший из всех возможных портфелей. При этом нам важно, чтобы адаптивная стратегия формирования портфеля была эффективно вычислимой. Именно такой портфель и называется универсальным.

В нашей работе мы не будем рассматривать адаптивные стратегии, включая универсальные портфели. Интересующийся читатель сможет найти подробную информацию в ссылках.

2 Портфельная теория Марковица

2.1 Описание модели

Первая основная работа об оптимальном выборе портфеля ценных бумаг была опубликована в 1952 году в журнале Journal of Finance Гарри Марковицем. В своей статье Марковиц предложил методику по оценке портфеля ценных бумаг по соотношению ожидаемой доходности и дисперсии (сейчас такой подход также называют Современной портфельной теорией).

В 1990 году Гарри Марковиц, Мертон Миллер и Вильям Шарп получили за свои работы в области портфельной теории нобелевскую премию.

В оригинальной статье Марковица [2] исследуется задача о выборе оптимального портфеля ценных бумаг для одного временного периода без наличия транзакционных (или любых иных издержек). Далее приведем формальное описание модели следуя [26].

Есть инвестор. Инвестор обладает некоторым, ненулевым начальным капиталом. Пусть капитал инвестора в момент t_0 равен W_0. Данный капитал он может разместить на рынке на один период. На рынке доступно n ценных бумаг. Предполагается, что любая (даже очень маленькая) доля капитала может быть вложена в любую интересующую бумагу. Т.е. можно покупать любую долю интересующей акции. Соответственно существует целое множество C доступных для инвестора портфелей ценных бумаг.

Пусть S_0 - n-мерный вектор, компоненты которого соответствуют ценам торгуемых бумаг в момент t_0 (т.е. $S_{i,0}$ есть цена i-й ценной бумаги в момент t_0). Тогда множество допустимых портфелей C можно описать так:

$$C = \{x \in R^n : S_0 \cdot x \leq W_0\}$$

Здесь i-я компонента вектора x равна количеству акций i-го типа в портфеле. Другое, на наш взгляд более естественное описание множества C получается при работе с долями.

$$C = \{x \in R^n : \sum x_i \leq 1\}$$

Здесь i-я компонента вектора x равна доле капитала W_0, которая была инвестирована в акции i-го типа. В дальнейшем мы будем пользоваться вторым определением множества C. Соответственно "портфель"в нашем понимании есть распределение начального капитала по доступным активам.

Легко видеть, что в обоих случаях множество допустимых портфелей является выпуклым множеством.

Какой портфель стоит выбрать инвестору из множества допустимых портфелей?

Для того, чтобы определить понятие "оптимальности вводятся дополнительные предположения о предпочтениях инвестора и о поведении ценных бумаг.

Определим понятие доходности i-й ценной бумаги в период t_0. Пусть S_1 соответствует ценам на ценные бумаги в период t_1. Тогда доходность i-й ценной бумаги в период t_0 равна:

$$r_i = \frac{S_{i,1} - S_{i,0}}{S_{i,0}}$$

Можно определить n-мерный вектор доходностей $r = (r_1, r_2, ..., r_n)^T$.

Соответственно, доходность портфеля x равна взвешенной доходности входящих в него бумаг:

$$r(x) = r^T x$$

Тогда капитал инвестора в момент t_1 после инвестирования капитала W_0 в портфель x составит:

$$W_1 = W_0(1 + r(x))$$

Предположения о предпочтениях инвестора:

1) Предположение о ненасыщаемости (nonsatiation):

Инвестор предпочитает более высокий уровень конечного благосостояния более низкому (при прочих равных).

2) Инвестор избегает риска:

Инвестор предпочтет портфель с наименьшей дисперсией (при прочих равных).

Замечание 1) Во втором предположении использовано слово "дисперсия что сразу переносит нас в контекст теории вероятности, ведь дисперсия может быть только у случайной величины.

Ключевое место этой (и других) теорий заключается в том, как именно моделируется неопределенность будущего. В модели Марковица предполагается, что доходность ценной бумаги есть случайная величина, распределенная по некоторому вероятностному закону. То же самое относится и к доходности портфеля, так как это линейная комбинация случайных величин. Причем из предположения 1) и 2) следует, что инвестора интересуют только первые два момента доходности портфеля, все остальные его свойства для инвестора не представляют интереса.

Существенно также и то, что в модели Марковица мы из стохастической задачи перешли к задаче полностью детерминированной. Данный подход является общераспространненным. Ключевое место заключается также в том, как именно этот переход осуществлять.

Замечание 2) Марк Рубинштейн в своей обзорной статье [4] отмечает, что судя по всему вариация доходности ценной бумаги была предложена в качестве меры риска в работе [27]. Данная мера риска выбрана в первую очередь из-за простоты вычисления по статистическим данным. Другие меры риска также широко исследовались, в том числе и самим Марковицем (см. например [28]). На данный момент в численном инвестиционном анализе широко применяются и другие меры риска (об этом более подробно будет написано в другой части работы). Мотивацией для использования других, более сложных мер риска является то, что в модели Марковица инвестор одинаково негативно относится к отклонениям доходности как в худшую, так и в лучшую сторону, что не естественно. Логично было бы вводить "пенализацию"одностороннего характера, только на возможность негативных собитий.

2.2 Эффективный портфель как решение задачи оптимизации

В модели Марковица предполагается, что доходность r_i i-й ценной бумаги в момент времени t_0 является случайной величиной. Причем считается, что мы можем оценить вектор $\overline{r} = E[r]$ ожидаемых доходностей ценных бумаг и их ковариационную матрицу $\Sigma = cov[r]$

Тогда предположения 1) и 2) о предпочтениях инвестора можно формализовать. Причем есть три равнозначных способа сделать это.

Вариант 1) Пусть у инвестора есть некоторый "желаемый"уровень доходности p. Это значит, что инвестор готов рассматривать портфели только с доходностью не ниже p. При этом он хочет минимизировать риск портфеля. Получаем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \min \quad & x\Sigma x \\ w.r.t. \quad & \overline{r}^T x \geq p \\ & \sum x_i = 1 \end{aligned}$$

Вариант 2: Пусть у инвестора есть некоторый "желаемый"уровень риска σ. Это значит, что инвестор готов рассматривать портфели только с риском не более σ. При этом он хочет максимизировать доходность портфеля. Получаем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \max \quad & \overline{r}^T x \\ w.r.t. \quad & x\Sigma x \leq \sigma \\ & \sum x_i = 1 \end{aligned}$$

Вариант 3: Наконец, можно предположить, что инвестор готов брать на себя дополнительный риск при росте доходности портфеля. Весь вопрос лишь в "цене". То есть оптимальный портфель есть решение следующей задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} \max \quad & \overline{r}^T x - \lambda x\Sigma x \\ w.r.t. \quad & \sum x_i = 1 \end{aligned}$$

В данном случае λ задает цену риска в терминах доходности. Параметр λ называется индексом неприятия риск Эрроу-Пратта ([8], [9]). Когда λ мало, пенализация от ввода в портфель более рискованных бумаг мала, что приводит к выбору более рискованных портфелей. Соответственно, когда λ велико, выбираются более консервативные портфели. Предположение 2) о предпочтении инвестора эквивалентно положительности λ. Легко видеть, что данная задача есть не что иное, как переписанная задача из варианта 2, ограничение из которой мы ввели в целевой фунционал с помощью множителя Лагранжа.

Решение задач из вариантов 1, 2 и 3 совпадают при соответствующем выборе параметров p, σ и λ, которые отражают предпочтения инвестора о соотношении риск-доходность.

Все три задачи являются задачами квадратичного программирования. Для данного класса задач имеются эффективные алгоритмы вычисления.

Также стоит отметить, что многие популярные дополнительные ограничения на портфель не ухудшают структуру задачи. Приведем некоторые популярные дополнительные ограничения:

$x \geq 0 \Leftrightarrow$ запрету коротких позиций в портфеле;

$\forall i : x_i \leq \alpha \Leftrightarrow$ доля каждой из бумаг в портфеле не превосходит некоторого числа. Данное ограничение пришло из сообрадения диверсификации портфеля.

Однако есть важные исключения. Самым важным, пожалуй, является ограничение на количество входящих в портфель ценных бумаг. Требуется, чтобы число используемых бумаг не превышало некоторого наперед заданного числа. Мотивацией для данного ограничения являются соображения сложности портфеля (как для расчета, так и для администрирования инвестиционным менеджером), снижение количества операций по ребалансировке портфеля и, соответственно, комиссионных расходов, желание работать с крупными лотами. Данное ограничение в англоязычной литературе называется cardinality condition. Подробнее мы обсудим данное ограничение в секции, посвященной разряженному портфелю.

Другое важное исключение - запрет на работу с неполными лотами $\forall i : x_i \in Z$. Данное ограничение перемещает нас из класса задач выпуклого программирования в класс задач целочисленного выпуклого программирования. Это очень важно, так как для первого класса задач есть эффективные численные алгоритмы, а для второго нет. Стандартной техникой решения данных задач являются техники релаксации. Смысл их заключается в том, что сначала решается задача без ограничения на целочисленность компонент портфеля, после чего ищется ближайшая целочисленная точка, удовлетворяющая условиям на портфель. Как будет показано далее, это является одной из причин для рассмотрения задачи о робастном портфеле ценных бумаг.

Замечение 1: Оптимальный портфель по Марковицу есть диверсифицированный портфель.

Замечание 2: Важно, чтобы ограничения в задаче сохраняли свойство выпуклости. Указанные выше дополнительные ограничения оставлют задачу в классе выпуклых. Это важно потому что только выпуклые задачи имеют эффективное алгоритмическое решение.

Замечание 3: В работе Марковица большое внимание уделяется так называемому "эффективному множеству". Сейчас мы не будем на этом останавливаться. Можно лишь указать, что эффективное множество получается из варианта 3), когда λ пробегает все допустимые (у нас положительные) значения.

2.3 Сложность оценивания оптимального портфеля

В нашей модели рынка с n ценными бумагами для расчета оптимальных весов необходимо знать матрицу ковариаций активов и их ожидаемые доходности, то есть $n(n+1)+n$ неизвестных параметров. Как показал Фама ([10]), при некоторых предположениях эффективный портфель будет содержать все доступные бумаги, а следовательно придется оценивать все неизвестные параметры. Для оценки матрицы ковариаций и ожидаемых доходностей необходимо решить задачу оптимизации, которая получается при использовании той или иной схемы статистического оценивания. Как правило сложность решения таких задач зависит линейно или даже квадратично (зависит от структуры задачи и используемого алгоритма) от размерности пространства параметров, в нашем случае $n(n+1)+n$. Эта зависимость очень плохая, так как даже с текущим уровнем вычислительной техники, мы будем не в состоянии оценивать оптимальные портфели в пространстве, состоящим из более чем тысячи (или нескольких) ценных бумаг.

Для борьбы с огромной размерностью задачи как правило применяются факторные модели (см, например, [6]). Идея факторных моделей очень проста. Предполагается, что динамика цен n ценных бумаг определяется динамикой p факторов, причем $p \ll n$. Обозначим вектор факторов через $v = (v_1, ..., v_p)$.

$$r = Fv$$

Здесь F - $n \times p$ факторная матрица. Факторная матрица F определяется по историческим данным с помощью регрессионного анализа. Факторы предполагаются независимыми случайными процессами.

Как уже стало понятно, в данных моделях предполагается, что рынок переполнен, то есть источников неопределенности на рынке намного меньше, чем ценных бумаг. Более того, ковариация ценных бумаг может быть легко рассчитана через ковариацию факторов, число которых намного меньше числа ценных бумаг на рынке.

Иногда под факторными моделями подразумевают несколько иной объект ([29]). Все, что было написано выше остается в силе, только со следующей оговоркой:

$$\overline{r} = F\overline{v}$$

или же, иначе

$$r_i = a_i + \sum_j b_{ij} \cdot v_j + \epsilon_i$$

Здесь $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ отражает индивидуальный риск бумаги.

Наиболее известной факторной моделью является, пожалуй, модель CAPM (Capital Assets Pricing Model), предложенная Шарпом в работе [7], единственным фактором в которой является "рыночная"доходность.

2.4 Альтернативные постановки

Другая проблема, возникающая при работе с моделью Марковица заключается в том, что при ее решении приходится решать задачу квадратичного программирования. Особенно существенно это для составления больших портфелей, так как наиболее эффективные методы для задач выпуклого программирования - методы внутренней точки - применимы только для задач сравнительно низкой размерности. Для задач же огромной размерности можно применять только методы градиентного типа. Некоторые из исследователей (как и сам Шарп) предлагали искать не решение оригинальной задачи, а разного рода модификаций, которые могут быть сведены к задачам линейного программирования (например, [5]).

Другим популярным классом моделей являются модели с использованием показателя VaR. Соответствующая задача оптимизации модет быть выписана в следующем виде:

$$\min_{w \in C} \min \gamma$$

$$Prob\{\gamma \leq -\tau(r,x)\} \leq \epsilon$$

Идея заключается в том, чтобы найти такое минимальный (среди всех допустимых портфелей) минимальный уровень γ, что вероятность события, что по портфелю потери составят более $\tau(r,x)$ меньше ϵ.

Проблемой этого подхода является большая требовательность к данным (нужно знать распределение доходностей ценных бумаг r, а не только первые два момента) и чувствительность к ошибкам.

2.5 Теория полезности

Задача об оптимальном выборе портфеля может быть сформулирована в более широком виде в терминах теории полезности. Основная идея заключается в том, что каждый инвестор имеет некоторую функцию полезности $U(\cdot)$, отражающую его предпочтения (в отношении риска, доходности и так далее). Условия о предпочтениях инвестора можно отразить, требуя от функций полезности выполнения следующих условий: $U'(\cdot) > 0$, $U''(\cdot) \leq 0$. Задача об оптимальном выборе портфеля может быть переписана в виде:

$$\max_x E[U(W_0(1 + x^T r))]$$

$$s.t. \sum x_i = 1$$

Хотя при расчете могут использоваться различные функции полезности, в случае, когда мы имеем дело с хорошим (например, нормальным) распределением доходностей r полученные оптимальные портфели практически совпадают. Это позволяет выбирать функцию полезности так, чтобы получить наиболее простую модель. С другой стороны выбор функции полезности существеннен при работе с "плохими"распределениями.

2.6 Оценивание неизвестных параметров

Важный практический вопрос, возникающий при попытке применить данную (и вообще любую) модель на практике - откуда взять исходные данные. В нашей задаче это матрица ковариации и вектор ожидаемых доходностей заданных активов. Далее мы во многом будем опираться на хорошо написанную главу №6 из [30].

В нашей модели предполагается, что доходности ценных бумаг (кроме безрискового актива) являются случайными величинами. Проблема заключается в том, что у нас есть только исторические данные о прошлых реализациях этих случайных величин. Почему это проблема будет понятно позднее.

Как правило для оценивания доходностей и матрицы ковариаций делается следующая операция: 1) генерируется выборка случайных величин распределенных также, как эмпирическая функция распределения доходностей (по историческим данным), 2) оценивается среднее значение для выборки и матрица ковариаций.

Другими словами, зачастую предполагается, что случайный процесс, соответствующий динамике доходностей ценных бумаг является стационарным и историческое среднее является хорошим приближением для математического ожидания.

$$\hat{r} = \frac{\sum_{t=1}^{T} r^t}{T}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (r_i^t - \hat{r_i})(r_j^t - \hat{r_j})}{T-1}$$

Однако известно что предположение о стационарности как правило нарушается (см., например, [11]). Это естественно, так как динамика на фондовом рынке во многом определяется экономическими, политическими и общественными событиями. Предположение о стационарности, грубо говоря, соответствует предположению об отсутствии крупных событий, имеющих долгосрочное влияние на фондовый рынок, а также предположению об отсутствии долгосрочных трендов. К событиям, имеющим долгосрочное влияние можно отнести, например, начало войны или революции. К долгосрочным трендам можно отнести, например, тенденцию по снижению процентных ставок или политику количественного смягчения, проводимую в США во время, когда Бен Бернанке занимал пост главы ФРС для борьбы с финансовым кризисом 2008 года.

Выборочное среднее плохо подходит для оценки в том числе и из-за того, что эмпирическое распределение доходностей имеет "тяжелые"хвосты. Как было показано в [12], в случае тяжелых хвостов распределения выборочное среднее уже не является лучшей линейной несмещенной оценкой. Отмечалось, что и выборочная матрица ковариаций (см. [21]) также дает плохую оценку.

Другой, несколько более продвинутой техникой являются модели типа ARCH и GARCH, а также регрессионных моделей с взвешенными данными. В рамках данных моделей предполагается наличие лаговых переменных и автокорреляции. Однако существенно данные модели не отличаются от случая, рассмотренного ранее - так или иначе предполагается, что прошлые значения доходностей имеют предсказательную силу при оценке будущих доходностей, при этом структура зависимости будущих значений от прошлых не меняется во времени.

В целом хорошо известно, что модель Марковица применима только в предположении, что доходности активов имеют распределение, принадлежащее семейству эллиптических распределений или в предположении о том, что функция полезности инвестора является квадратичной. Эмпирические данные, напротив, говорят о том, что функция полезности инвестора имеет степенной вид, а распределение доходностей активов не является нормальным.

2.7 Многопериодная модель расчета оптимального портфеля и модель с транзакционными издержками

Изначально модель Марковица была однопериодной. В дальнейшем многие авторы обращались к проблеме разработки многопериодной политики выбора портфеля ([18, 15, 16, 17]). Как правило данная задача сводилась к задаче динамического программирования. В данном случае решение соответствует оптимальной политике ребалансировки портфеля. Важным расширением является введение транзакционных издержек, как правило, линейных ([19, 20, 15]).

Задачу поиска оптимальной торговой политики можно сформулировать в следующем виде (далее следуем [15]):

Пусть задан горизонт планирования $T+1$, обозначим через x^t портфель в начале периода t, через w^t этот же портфель в стоимостном представлении (w_i^t есть стоимость x_i^t на момент t), через u^t вектор транзакций, i-я компонента которого соответствует средствам, потраченным (вырученным) на покупку (от продажи) ценной бумаги i.

Обозначим через $A^t = diag(r^t)$.

Тогда динамика стоимости портфеля можно описать так:

$$x^{t+1} = A^t(x^t + u^t)$$

$$\forall t \in [1, ..., T], (x^t, u^t) \in \Omega(t)$$

Здесь $\Omega(t)$ есть множество допустимых значений для пары (x^t, u^t) в момент t. В случае отсутствия издержек и сложных дополнительных ограничений множество допустимых значений можно описать как

$\Omega(t) = x^t = A^{t-1}(x^{t-1} + u^{t-1}); \sum_i u_i^t = 0.$

В итоге мы могли бы попробовать рассматривать задачу:

$$max \sum_i w_i^{T+1}$$

$$x^{t+1} = A^t(x^t + u^t)$$

$$\forall t \in [1,...,T], (x^t, u^t) \in \Omega(t)$$

Однако это сложно с технической точки зрения. Более удобным вариантом является следующая задача:

$$minE(\sum_i w_i^{T+1} - W^{des})^2$$

$$x^{t+1} = A^t(x^t + u^t)$$

$$\forall t \in [1,...,T], (x^t, u^t) \in \Omega(t)$$

Здесь W^{des} характеризует желаемый уровень благосостояния инвестора на момент окончания срока инвестирования. Видно, что выбранная целевая функция вводит штраф и для случая, когда финальное благосостояние оказывается больше желаемого. Конечно было бы логичнее использовать функцию $E(\min[\sum_i w_i^{T+1} - W^{des}], 0)^2$ в качестве целевой, однако решение задачи от этого существенно усложниться. Лучшей стратегией будет выбор заведомо большого W^{des}.

Решением в данной задаче будут оптимальные решающие правила, определяющие размер транзакций как функцию от портфеля $u^t = \varphi^t(x^t)$.

В случае отсутствия дополнительных ограничений, оптимальные решающие правила имеют аффинный вид:

$$\varphi^t(z) = K^t(z - g^t)$$

$$K^t = -I + \frac{1}{1^T(\Sigma^t)^{-1}1^T}(\Sigma^t)^{-1}11^T$$

$$g^t = W_{tar}^{t+1}(\Sigma^t)^{-1}\bar{r}^t$$

$$W_{tar}^t = W^{des}\Pi_{\tau=t}^T 1^T(\Sigma^t)^{-1}1^T$$

В случае наличия сложных ограничений эффективное вычисление оптимальных политик невозможно, однако возможна релаксация исходной задачи и поиск субоптимальных политик. Более подробно данный вопрос освещен в [15].

К сожалению, для решения задачи в многоперидном случае, как и для случая однопериодного, нужно знание о распределении доходностей для каждого периода.

3 Робастный портфель ценных бумаг

3.1 Мотивация

Как было показано в [13], доходность оптимального по Марковицу портфеля ценных бумаг очень чувствительна к ошибкам в оценках вектора ожидаемых доходностей. Более точно следующее утверждение. Тоже самое относится и к другой распространенной мере риска - VaR.

Оптимальный по Марковицу портфель x_opt является решением следующей задачи оптимизации:

$$\max \quad \overline{r}^T x - \lambda x \Sigma x$$
$$w.r.t. \quad \sum x_i = 1$$

При этом фактическая доходность инвестора составит $x_opt^T r_fact$, где r_fact - реализовавшаяся доходность.

Пусть $\triangle = r_fact - \overline{r}$.

Пусть $W(\triangle) = x_opt^T r_fact = x_opt^T(\overline{r} + \triangle)$.

Тогда можно сказать, что условие $\mid W(0) - W(\triangle) \mid = o(\triangle)$ не обязательно выполняется (или, что тоже самое, доходность портфеля сильно чувствительна к ошибкам в данных). Об этом говорит и ряд других исследований (см., например, [14]).

Фактическая доходность портфеля может быть существенно ниже планируемой не только из-за ошибок в оценке ожидаемых доходностей, но и из-за того, что реализовавшиеся доходности отличаются от своих ожидаемых значений (что естественно, особенно сильными могут быть отличия для доходностей, имеющих распределение с тяжелыми хвостами).

Другой источник ошибок - округления. Как уже писалось ранее, зачастую инвестиционные менеджеры требуют портфелей с целочисленным количеством акций или же с целым количеством лотов по каждой бумаге. Эта задача целочисленного выпуклого программирования не имеет эффективного алгоритмического решения. Как правило, на практике поступают следующим образом: решается задача без условия целочисленности, после чего выбирается ближайший к решению портфель, удовлетворяющий условию целочисленности. В результате получается портфель, в общем то отличающийся от оптимального. Это может привести к существенному падению доходности портфеля.

Все перечисленные выше проблемы имеют одинаковое влияние на фактическую доходность портфеля, однако их природа различна. Поэтому в худшем случае может реализоваться каждый из рисков и фактическая доходность портфеля будет намного ниже планируемой.

Замечания, написанные выше существенны и для моделей, использующих VaR (о том, как применять техники робастной оптимизации для данного случая можно прочитать.

Указанные выше причины стали мотивом для поиска методологии для выбора портфеля с максимальной доходностью при ограниченном риске, но менее чувствительной к начальным данным и действиям случайных факторов. Моделей для случаев, когда доступно значительно меньше информации о неизвестных факторах. В конце 90-х - начале 2000-х годов такая методология была предложена (для задач оптимизации) в работах Аркадия Немировского и его коллег (см., например, [3], [24], [25]), после чего исследования в данном направлении активно проводились различными авторами (см., например, [30]).

3.2 Методология

Далее мы будем следовать [25].

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\min_{x \in R^n} c^T x + d | Ax \leq b$$

В данной задаче компоненты вектора x являются переменными, а набор (c, d, A, b) определяется исходными данными. Как правило, коэффициенты (c, d, A, b) определяются из некоторых эмпирических данных. Как правило, коэффициенты (c, d, A, b) не известны точно. Некоторые из них не существуют на момент решения задачи (например, доходности активов в следующий период) и их замещают на оценки. Это ведет к ошибком предсказания. Некоторые из коэффициентов не могут быть измерены достаточно точно и это ведет к ошибкам измерения. Наконец некоторые решения x не могут быть использованы напрямую (например, есть требования целочисленности) и приходится брать некоторое приблеженное решение, что соответствует изменению коэффициентов.

Один из способов учесть указанную выше неопределенность в данных выглядит следующим образом:

Рассмотрим множество задач линейного программирования

$$\min_{x \in R^n} c^T x + d | Ax \leq b_{(c,d,A,b) \in U}$$

Здесь U задает множество неопределенности. Как правило, множество неопределенности есть некоторое центрированное множество с центром в точке, соответствующей номинальным данным.

Вектор $x \in R^n$ называется робастно допустимым решением задачи, если он удовлетворяет всем неравенствам $Ax \leq b \; \forall (c, d, A, b) \in U$.

Робастной версией исходной задачи называется следующая задача оптимизации:

$$\min_{x \in R^n} sup_{(c,d,A,b) \in U} [c^T x + d] | Ax \leq b \forall (c, d, A, b) \in U$$

В которой ищется минимальное значение целевого функционала при "худшей"реализации данных среди робастно допустимых решений.

Естественным образом данное определение может быть расширено на задачи квадратичного и полуопределенного программирования.

Лейт-мотивом для использования робастной оптимизации является проблема неточности или недоступности данных. В частности, иногда очень сложно оценить распределение вероятностей (его может и не быть вовсе) величин, но возможно достаточно эффективно аппроксимировать носителей распределений.

Существенно то, что в отличие от обычных стохастических моделей, в которых как правило оптимизируется некоторый функционал, имеющий смысл математического ожидания некоторой величины, множество, характеризующее неопределенность в задаче робастной оптимизации является ограниченным и замкнутым. Отметим, что распределения, рассматриваемые в стандартных стохастических моделях, не всегда имеют такой вид. Нормальное распределение, распределение Леви, экспоненциальное и многие другие имеют в качестве носителя неограниченные множества (как правило R, R_{++}). К распределениям, имеющим ограниченный носитель, можно отнести биномиальное (мультиномиальное) распределение, равномерное распределение на компакте и ряд других.

К сожалению не использовать совсем никакой информации о совместном поведении доходностей ценных бумаг не очень результативно. Если в задаче оставить информацию только следующего вида $r_i \in [r_i^-; r_i^+]$, а все другие взаимосвязи исключим, то задача сведется к простой, но не очень полезной:

$$max\ x^T r^-$$

$$\sum_i x_i = 1$$

Решением данной задачи почти наверное будет инвестирование в безрисковый актив.

Можно ввести дополнительную информацию о совместном поведении ценных бумаг. Обычно это делается с помощью матрицы ковариации. Однако в отличие от модели Марковица, где используется одна конкретная оценка матрицы ковариаций, в робастной оптимизации отдельные авторы предполагают ([30]), что матрица ковариаций принадлежит некоторому семейству:

$$\Sigma(\zeta) = \Sigma_0 + \sum_i \zeta_i A_i$$

$$\zeta \in \Xi$$

$$\forall \zeta \in \Xi : \ \Sigma(\zeta) \succeq 0$$

Здесь Ξ описывает множество неопределенности, задаваемое исследователем, A_i некоторые матрицы.

Мы получили задачу полуопределенного программирования (Semidefinite programming, SDP). Однако более эффективен и интуитивно понятен другой подход, сводящий задачу выбора оптимального робастного портфеля к задача конической оптимизации (более точно, Second Order Cone Programming, SOCP).

$$\max t$$

$$[\bar{r} + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i a^i]^T x \geq t$$

$$\sum_i x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

$$\zeta \in \Xi$$

Здесь a^i вектор, у которого все компоненты, кроме i-й равны нулю, а $a_i^i = \sigma_i$ равна стандартному отклонению доходности i-й бумаги.

Как видно выше, вся неопределенность в задача задается последним ограничением.

Можно вводить различную информацию о совместном поведении доходностей.

Вариант 1 (Box RC):

$$\Xi = \{\zeta \mid \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$$

соответствует самому консервативному сценарию (отсутствуют взаимосвязи доходностей). Нам он не очень интересен, так как почти всегда ведет к инвестированию исключительно в безрисковый актив.

Вариант 2 (Ball-box RC):

$$\Xi = \{\zeta \mid \|\zeta\|_\infty \leq 1,\ \|\zeta\|_2 \leq \Omega\}$$

Данное ограничение вводится в случае, когда мы хотим, чтобы ограничения задачи удовлетворялись с некоторой вероятностью. Более конкретно, при $\Omega = \sqrt{2\ln\frac{1}{\epsilon}}$ ограничения выполняются с вероятностью $1-\epsilon$. Другими словами при введении такого ограничения мы утверждаем, что доходность портфеля не ниже рассчетного значения, например, в 99,5% случаях.

Вариант 3 (Budgeted RC):

$$\Xi = \{\zeta \mid \|\zeta\|_\infty \leq 1,\ \|\zeta\|_1 \leq \gamma\}$$

Параметр γ играет ту же роль, что и параметр Ω выше. При этом, оказывается, что для одного и того же ϵ расчетная доходность портфеля в третьем варианте ниже, чем во втором. Возникает вопрос целесообразности использования третьего варианта по сравнению со вторым. Единственным преимуществом третьего метода является то, что получаемая здесь задача может быть сведена к задаче линейного программирования, для которой есть широко распространенные коммерческие солверы. С другой стороны при +++использовании второго варианта мы имеем дело с задачей конического программирования, которая более требовательна с вычислительной точки зрения.

4 Разреженный оптимальный портфель

Индексные фонды относятся к пассивным инвестиционным управляющим. Их задачей является получение доходности не хуже, чем доходность некоторого индекса. Основной стратегией фонда, которая позволяет ему зарабатывать, является инвестирование в портфель с небольшим числом акций, доходность которого реплицирует или следует за доходностью индекса. Это позволяет реже ребалансировать портфель и снижать транзакционные издержки. Ценой же является риск отклонения доходности портфеля фонда от доходности индекса из-за несовершенного хеджирования.

Как правило математически задача формулируется следующим образом:

Индекс определяется как портфель ценных бумаг c, доходность которого равна $c^T r$. Нужно найти аппроксимирующий его портфель x_0 с наименьшим количеством ценных бумаг. В частности мы бы хотели потребовать, чтобы ошибка аппроксимации δ не превышала некоторого наперед заданного уровня ϵ, например, 10%:

$$\delta = [\frac{E((c - x_0)^T r)^2}{E(c^T r)^2}]^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$$

Это ограничение можно переписать в следующем виде:

$$(c - x_0)^T \Sigma (c - x_0) + (c - x_0)^T \bar{r}\bar{r}^T (c - x_0) \leq \epsilon^2 [c^T \Sigma c + c^T \bar{r}\bar{r}^T c]$$

Преобразуя получим выпуклое ограничение на x_0

$$(1 - \epsilon^2) c^T \Sigma c + x_0^T \Sigma x_0 - 2c^T \Sigma x_0 + (1 - \epsilon^2) c^T \bar{r}\bar{r}^T c + x_0^T \bar{r}\bar{r}^T x_0 - 2c^T \bar{r}\bar{r}^T x_0 \leq 0$$

Ограничение на число входящих в портфель бумаг, если его выписать напрямую, задает невыпуклое множество $G = x | p(x) = \# i : x_i \neq 0, p(x) \leq j$. Соответственно, эффективных алгоритмов для решения задачи оптимизации с таким ограничением составить нельзя. Для решения задач с таким типом ограничений применяют l1-пенализацию (см. например [22], [31]). Этот метод во многом эвристический и уходит корнями к работе [23].

Релаксационная задача будет выглядеть следующим образом:

$$\min \sum_i |x_i|$$

$$(1 - \epsilon^2) c^T \Sigma c + x^T \Sigma x - 2c^T \Sigma x + (1 - \epsilon^2) c^T \bar{r}\bar{r}^T c + x^T \bar{r}\bar{r}^T x - 2c^T \bar{r}\bar{r}^T x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

Это выпуклая, негладкая задача условной оптимизации, допускающая эффективное решение в пространствах с небольшим числом переменных.

5 Численные эксперименты

5.1 Оптимальный портфель vs Робастная версия

В первой серии экспериментов мы сравнивали эффективность оптимального портфеля по Марковицу и его робастной версии.

Для анализа были выбраны 40 ценных бумаг, торгуемых на ММВБ:

GAZP (Газпром), MSNG (МосЭнерго), ODVA (iМедиахолдинг), AVAZ (АвтоВАЗ), APTK (Аптека 36,6), AFLT (Аэрофлот), BSPB (Банк Санкт-Петербург), VRAO (Интер РАО Восток), VTBR (ВТБ), SIBN (Газпром Нефть), DIXY (Дикси), IRAO (Интер РАО), IRGZ (ИркутскЭнерго), KMAZ

(Камаз), LSNG (ЛенЭнерго), LKOH (Лукойл), MVID (М.Видео), MGNT (Магнит), MTLR (Мечел), MTSS (МТС), PIKK (ПИК), PLZL (Полюс Золото), GRAZ (Разгуляй), RASP (Распадская), RBCM (РБК-ТВ), ROSN (Роснефть), HYDR (РусГидро), RSEA (Русское море), SBER (Сбербанк), AFKS (АФК Система), SVAV (Соллерс), SNGS (Сургутнефтегаз), TATN (Татнефть), TGKA (ТГК-1), TGKN (ТГК-14), TGKB (ОГК-2), TGKE (ТГК-5), TGKF (ТГК-6), TGKI (ТГК-9), FEES (ФСК ЕЭС).

Нас интересовала ежемесячная доходность бумаг с 1 января 2011 года. При расчете доходности нормировались на месячную продолжительность. То есть формула для расчета месячной доходности бумаги в период i, продолжительность которого была равна n дням выглядела так:

$$r_i = \frac{30 \cdot (P_{i+1} - P_i)}{n \cdot P_i}$$

Для анализа нам пришлось придумать свою методику сравнения (вернее методику согласования параметров моделей оптимального и робастного портфелей), так как известные методики или были неприменимы в нашем случае (так как их критерий совпадал с методикой построения портфеля) или же их критерий качества портфеля казался нам сомнительным.

Мы решили использовать в сравнении коэффициент Шарпа портфелей и их реальную доходность в следующий отчетный период. Этот выбор обусловлен тем, что первый критерий часто применяется на практике и нас интересовало, согласуются ли его предсказания с реализацией.

Коэффициент Шарпа портфеля x представляет оцененочную меру соотношения риск-доходность и рассчитывается по следующей формуле:

$$SP(x) = \frac{E(r(x) - r_f)}{Var(x)}$$

Здесь r_f - безрисковая доходность. В качестве r_f мы брали среднесрочную ставку ГКО-ОФЗ в 7.39% годовых. Стоит отметить, что коэффициент Шарпа является симметричной мерой риска, штрафуя за отклонения доходностей как в положительную, так и в отрицательную сторону.

Использование такого критерия представляется необоснованным в случае запрета на короткие продажи и обоснованным при его отсутствии.

Реализовавшая доходность не может использоватья для сравнения альтернативных вариантов инвестирования в момент принятия решения, однако служит хорошим критерием (при наличии статстики) для оценки самих методов принятия решения, так как включает не оцененные, а реализовавшиеся риски.

Робастный и оптимальный по Марковицу портфели являются решением задач оптимизации, в которых входными параметрами являются вероятность реализации доходности, ниже гарантированного уровного (для робастного портфеля) и ограничение на ожидаемую доходность или вариацию портфеля (для оптимального портфелю по Марковицу). Риск в данных постановках учитывается различным способом. Однако решение не связывать параметры данных моделей приведет к тому, что портфели будут несравнимыми.

Поэтому мы решили использовать следующую схему подбора параметров:

1) Выбирается ограничение на вероятность для задачи о робастном портфеле ϵ.

2) Рассчитывается решение о рабастном портфеле ценных бумаг с ограничением типа Ball-Box.

3) Рассчитывается ожидаемая доходность робастного портфеля.

4) Рассчитывается задача оптимального портфеля Марковица при ограничении на ожидаемую доходность (не ниже доходности робастного портфеля).

Для полученных портфелей расчитываются коэффициенты Шарпа, ожидаемые и реализовавшиеся доходности.

Изначально мы проводили расчеты для марта 2014 года, однако в связи с событиями на Украине и, в частности, присоединением Крыма и последовавшим за этим санкциями и реакцией фондового рынка наш анализ оказался не очень репрезентативным. Так как оба подхода моделируют динамику цен акции как реализацию некоторой случайной величины, то есть опираются на стохастическую модель для реального мира, они не способны адекватно учитывать редкие события, сильно влияющие на рынок, но имеющие не стохастическую природу. В частности, как показал наш анализ, поведение рынка в марте 2014 при моделировании с помощью стохастических моделей имело вероятность реализации меньше 1/10000.

Поэтому мы в дальнейшем пытаемся построить оптимальный портфель на декабрь 2013 года.

Ниже приводятся графики для сравнения доходностей для различных постановок.

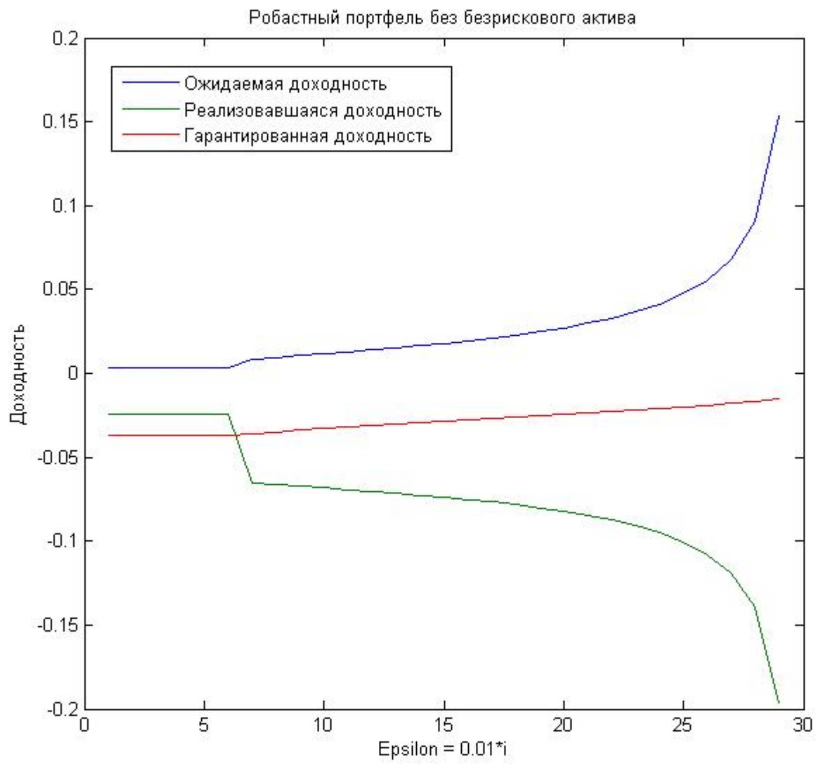
1) Без безрискового актива

ϵ	0.001	0.005	0.05	0.15
RO Safe R	-0.0371	-0.0371	-0.0371	-0.0284
RO Exp.R.	0.0038	0.0038	0.0038	0.0178
RO Sharpe	-0.0587	-0.0587	-0.0587	0.2335
M.-V. Exp. R.	0.2453	0.2453	0.2453	0.2508
M.-V. Sharpe	$1.23 \cdot 10^5$	$1.23 \cdot 10^5$	$1.23 \cdot 10^5$	$1.241 \cdot 10^5$
RO True R (1 m.)	-0.0241	-0.0241	-0.0241	-0.0738
M.-V. True R (1 m.)	-0.2063	-0.2063	-0.2063	-0.21

Как видно из таблицы, робастный портфель является досточно устойчивым к изменению ϵ.

Также видно, что коэффициент Шарпа для оптимального портфеля по Марковицу доминирует соответствующий показатель для робастного портфеля, что ожидаемо.

Мы построили сравнение для всех ϵ в интервале $[0.01; 0.29]$ с шагом в 1%.



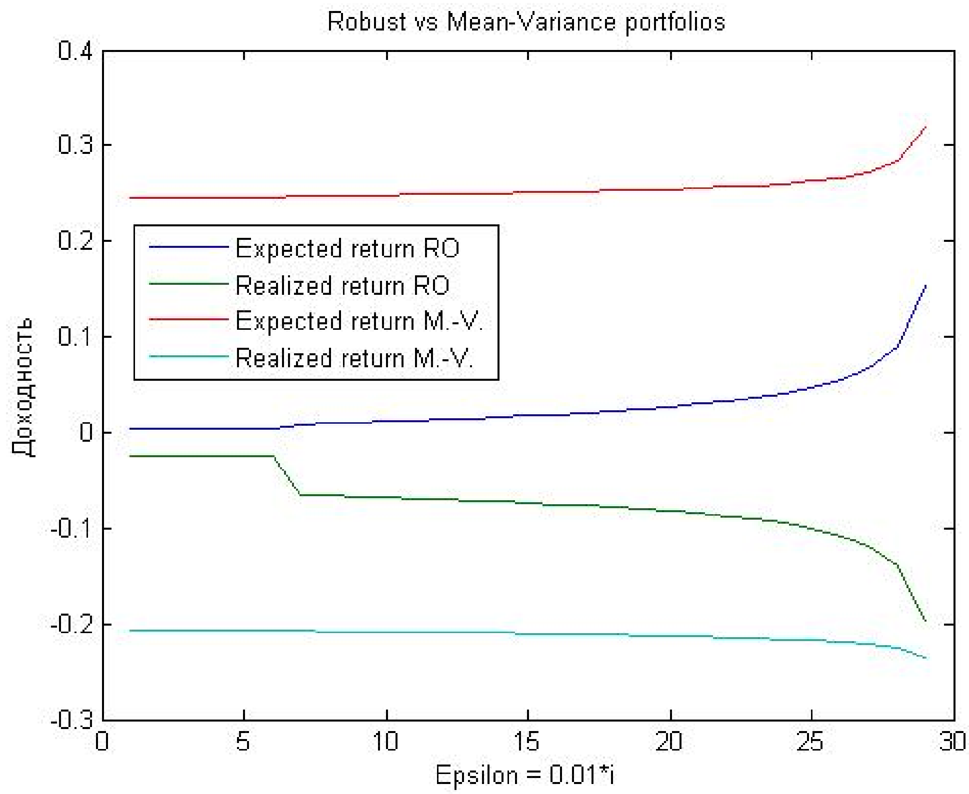
Результаты приведены на графиках ниже.

На данном графике приводится сравнение ожидаемой, гарантированной и реализованной доходности робастного портфеля.

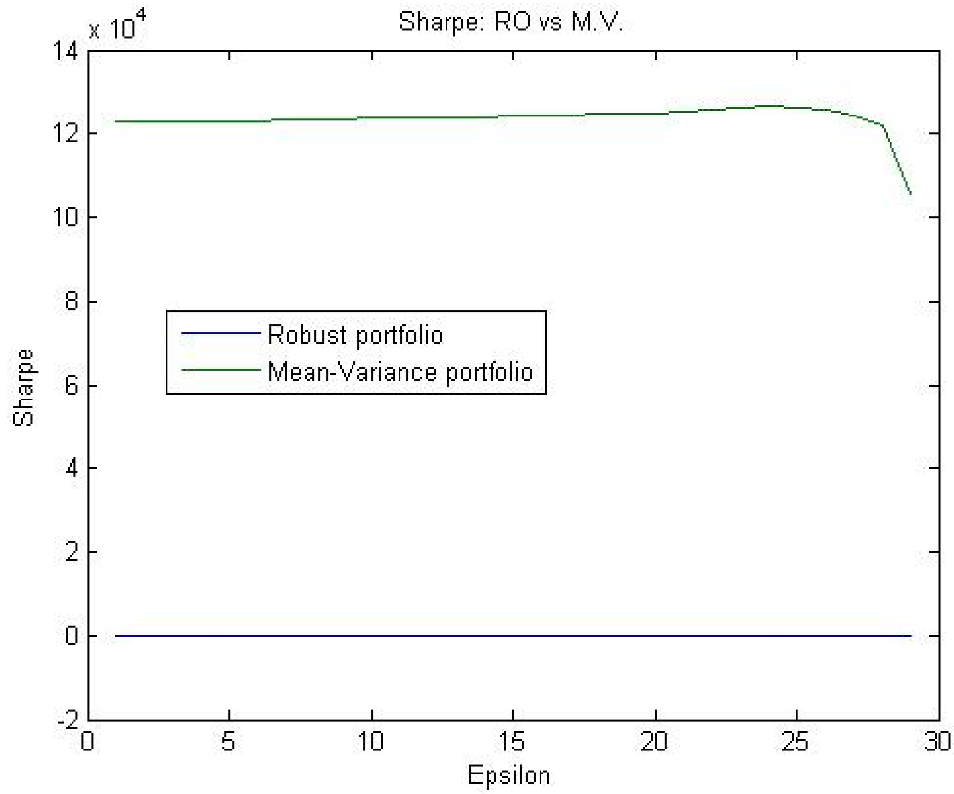
Как видно из графика, на 6-7 процентном уровне произошел качественный перелом. Мы начали инвестировать в бумагу, которая начала вести себя не так, как мы ожидали (вероятность такого ненормального поведения была ниже 7 процентов).

Для сравнения приведем график с результатами сравнения робастного и оптимального по Марковицу портфеля.

Как видно из графика, ожидаемая доходность оптимального портфеля была существенно выше ожидаемой доходности робастного портфеля, однако на практике все оказалось значительно хуже и оптимальный портфель показал плохую доходность.



Интересно отметить, что показатель Шарпа однозначно указывал нам на превосходство портфеля, оптимального по Марковицу.



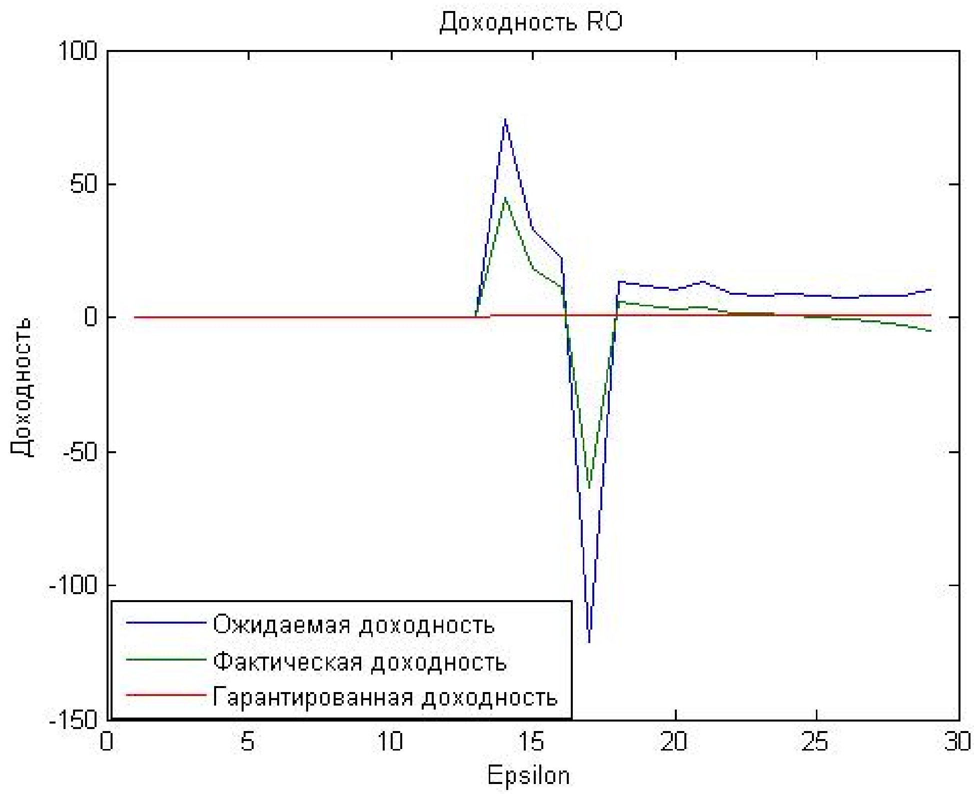
2) Без запрета на продажу, с безрисковым активом

На данном графике приводится сравнение ожидаемой, гарантированной и реализованной доходности робастного портфеля.

Как видно из графика, на 13 процентном уровне произошел качественный перелом. До этого момента оптимальным, с точки зрения робастного подхода, было инвестирование в безрисковый актив. Однако на 13 процентном уровне оптимальным оказалось инвестировать в рискованные бумаги, причем часть средств занимать по безрисковой ставке (мы оставили эту опцию).

Стоит особо остановится на выборе портфеля на уровне 13-15 процентов. В частности, портфель гарантировал с данным уровнем точности, что доходность будет выше безрисковой), при этом ожидаемая доходность была очень большой. Это представляется хорошим двойным сигналом для инвестирования, что подтвердилось большой фактической доходностью портфеля.

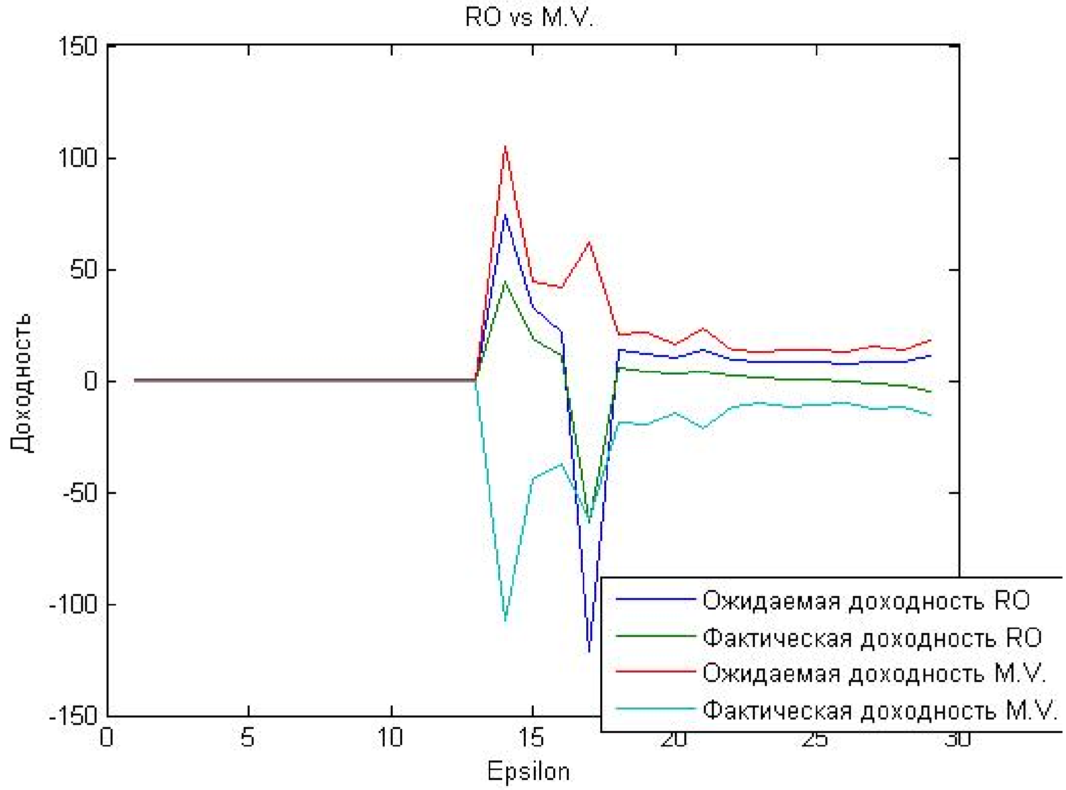
С другой стороны портфель , получившийся при уровне 15-18 процентов хотя и имел чуть более высокую гарантированную доходность (с меньшей гарантией), показал крайне низкую ожидаемую доходность. С этой точки



зрения данный портфель существенно хуже предыдущего.

Для сравнения приведем график с результатами сравнения робастного и оптимального по Марковицу портфеля.

Как видно из графика, ожидаемая доходность оптимального портфеля была существенно выше ожидаемой доходности робастного портфеля, однако на практике все оказалось значительно хуже и оптимальный портфель показал плохую доходность, почти везде уступая робастному портфелю.

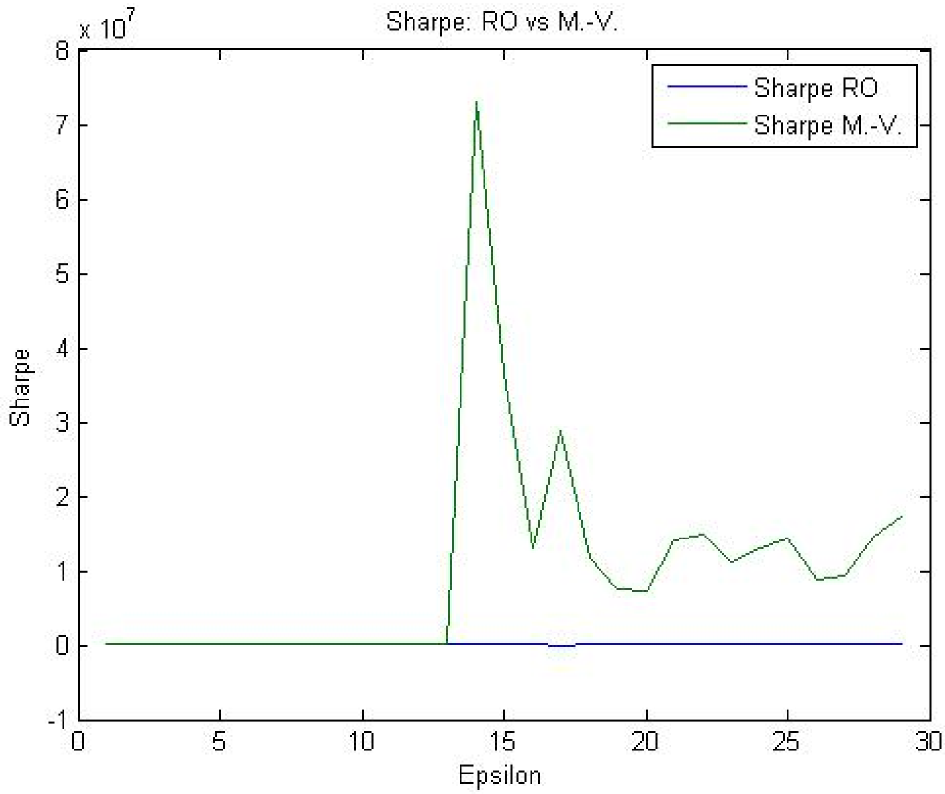


Интересно отметить, что показатель Шарпа, как и в предыдущем случае, однозначно указывал нам на превосходство портфеля, оптимального по Марковицу.

3) Запрет на продажу, с безрисковым активом

В данной постановке робастный подход предписывает инвестировать все средства в безрисковый актив.

Это действительно может являться базоразумной стратегией в обстоятельствах падающего российского рынка. В частности, на момент выбора портфеля только 12 бумаг имели положительную ожидаемую доходность и лишь 6 бумаг показывали доходность выше безрисоковой (при среднем уровне волатильности).



5.2 Индекс и его разреженная версия

В отличие от предыдущего пункта, где мы сравнивали активные стратегии управления портфелем ценных бумаг, в данном пункте нашей задачей будет оценка эффективности пассивной стратегии управления.

В частности нас будет интересовать, насколько удается снизить количество активно торгуемых бумаг, составляющих индекс, при использовании разреженной версии индекса, а также как часто мы будем терпеть незапланированные убытки из-за использования неточной аппроксимации.

В качестве тестового примера мы рассмотрим индекс ММВБ, включающий 50 бумаг.

Данный индекс рассчитывается следующим образом ([32]):

$$I_n = \frac{MC_n}{D_n}$$

Здесь D_n есть определяется в моменты ребалансировки индекса. На текущий момент действует D_n, установленное 18 марта 2014 года.

$D_n = 4512891869,8906$

MC_n есть суммарная капитализация всех акций по состоянию на момент n.

Она определяется по следующей формуле:

$$MC_n = \sum_{i=1}^{N} P_i^n \cdot Q_i^n \cdot FF_i^n \cdot W_i^n$$

Здесь P_i^n есть цена i-й акции в момент n, Q_i^n есть общее количество данных акций одного эмитента в момент n, FF_i^n поправочный коэффициент, учитывающий количество акций эмитента i в свободном обращении (free-float коэффициент) в момент n, W_i^n - коэффициент, ограничивающий долю капитализации i-й акции.

На момент написания работы индекс рассчитывался следующим образом:

№	Код	Наименование	Q	FF	Огр. на вес	W
1	GAZP	ОАО "Газпром ао	23 673 512 900	46%	0,644235	15,00%
2	SBER	ОАО "Сбербанк России ао	21 586 948 000	48%	0,925922	13,28%
3	SBERP	ОАО "Сбербанк России ап	1 000 000 000	100%	0,925922	1,07%
4	LKOH	ОАО "ЛУКОЙЛ ао	850 563 255	57%	0,925922	13,68%
5	MGNT	ОАО "Магнит ао	94 561 355	54%	0,925922	6,31%
6	SNGS	ОАО "Сургутнефтегаз ао	35 725 994 705	25%	0,925922	3,50%
7	SNGSP	ОАО "Сургутнефтегаз ап	7 701 998 235	73%	0,925922	2,16%
8	NVTK	ОАО "НОВАТЭК ао	3 036 306 000	27%	1	5,18%
9	ROSN	ОАО "НК "Роснефть ао	10 598 177 817	12%	1	4,74%
10	GMKN	ОАО "ГМК "Норильский никель ао	158 245 476	30%	1	4,33%
11	MTSS	ОАО "МТС ао	2 066 413 562	49%	1	4,22%
12	VTBR	ОАО Банк ВТБ, ао	12 960 541 337 338	39%	1	3,26%
13	TATN	ОАО "Татнефть ао	2 178 690 700	32%	1	2,24%
14	TATNP	ОАО "Татнефть ап	147 508 500	100%	1	0,29%
15	AFKS	ОАО АФК "Система ао	9 650 000 000	36%	1	2,17%
16	TRNFP	ОАО "АК "Транснефть ап	1 554 875	100%	1	1,92%
17	URKA	ОАО "Уралкалий ао	2 936 015 891	22%	1	1,63%
18	BANE	ОАО АНК "Башнефть ао	188 710 587	12%	1	0,70%
19	BANEP	ОАО АНК "Башнефть ап	38 673 878	100%	1	0,84%
20	MFON	ОАО "МегаФон ао	620 000 000	15%	1	1,50%
21	RTKM	ОАО "Ростелеком ао	2 669 204 301	28%	1	1,15%
22	RTKMP	ОАО "Ростелеком ап	242 831 469	70%	1	0,18%
23	POLY	Полиметалл Интернэшнл плс	389 472 865	50%	1	1,16%
24	ALRS	АК "АЛРОСА"(ОАО), ао	7 364 965 630	23%	1	1,00%
25	HYDR	ОАО "РусГидро ао	317 637 520 094	34%	1	0,92%
26	MOEX	ОАО Московская Биржа, ао	2 378 489 153	37%	1	0,87%
27	CHMF	ОАО "Северсталь ао	837 718 660	21%	1	0,79%
28	NLMK	ОАО "НЛМК ао	5 993 227 240	14%	1	0,62%
29	PHOR	ОАО "ФосАгро ао	129 500 000	19%	1	0,46%
30	VSMO	ОАО "Корп. ВСМПО-АВИСМА ао	11 529 538	29%	1	0,44%
31	EONR	ОАО "Э.ОН Россия ао	63 048 706 145	18%	1	0,39%
32	AFLT	ОАО "Аэрофлот ао	1 110 616 299	32%	1	0,39%
33	TRMK	ОАО "ТМК ао	937 586 094	28%	1	0,36%
34	RUALR	РУСАЛ Плс, рдр	2 000 000 000	8%	1	0,29%
35	LSRG	ОАО "Группа ЛСР ао	103 030 215	33%	1	0,29%
36	FEES	ОАО "ФСК ЕЭС ао	1 276 572 415 769	21%	1	0,28%
37	IRAO	ОАО "Интер РАО ао	10 440 000 997 683	18%	1	0,28%
38	MVID	ОАО "Компания "М.видео ао	179 768 227	42%	1	0,27%
39	PIKK	ОАО "Группа Компаний ПИК ао	660 497 344	32%	1	0,26%
40	RSTI	ОАО "Россети ао	161 078 853 310	14%	1	0,23%
41	GCHE	ОАО "Группа Черкизово ао	43 963 773	51%	1	0,21%
42	DIXY	ОАО "ДИКСИ Групп ао	124 750 000	33%	1	0,19%
43	MSTT	ОАО "МОСТОТРЕСТ ао	282 215 500	34%	1	0,16%
44	MAGN	ОАО "ММК ао	11 174 330 000	14%	1	0,15%
45	PHST	ОАО "Фармстандарт ао	37 792 603	23%	1	0,12%
46	NMTP	ОАО "НМТП ао	19 259 815 400	15%	1	0,12%
47	SVAV	ОАО "СОЛЛЕРС ао	34 270 159	34%	1	0,12%
48	BSPB	ОАО "Банк "Санкт-Петербург ао	439 554 000	41%	1	0,10%
49	MSRS	ОАО "МОЭСК ао	48 707 091 574	10%	1	0,10%
50	MTLR	ОАО "Мечел ао	416 270 745	35%	1	0,09%

Нас будет интересовать возможность аппроксимации динамики индекса с помощью как можно меньшего количества бумаг.

Из формулы расчета видно, что весовой коэффициент бумаги i в индексе равен

$$c_i^n = \frac{Q_i^n \cdot FF_i^n \cdot W_i^n}{D_n}$$

Для расчета мы использовали дневные котировки (цена закрытия) на указанные акции с 17 марта по 10 июня теущего года. Ниже приводится таблица зависимости количества активных компонент решения от уровня ϵ:

ϵ	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
Количество бумаг в портфеле	30	20	18	17	12	8

Как видно из таблицы, для достаточно разумного уровня ϵ динамика индекса определяется 20 бумагами.

6 Заключение

В данной работе мы исследовали методы формирования портфеля ценных бумаг в долгосрочном и среднесрочном периоде.

В первой части работы исследовалась эффективность методики, основанной на робастном подходе по принятию решений в условиях неопределенности. Хотя данный подход является более консервативным, чем стохастическая оптимизация, его эффективность на российском рынке ценных бумаг, как было показано на эмпирических данных, зачастую превосходит показатели, которые получаются при использовании теории Марковица.

Также мы показали, что коэффициент Шарпа зачастую не является хорошим индикатором качества портфеля.

Во второй части нашей работы мы показали, что с помощью l1-оптимизации возможно составление разреженных портфелей, динамика стоимости которых с большой вероятностью следует за динамикой стоимости целевого портфеля (как правило, индекса). При этом можно обойтись значительно меньшим числом бумаг, чем в исходном индексе.

Обе эти задачи имеют большое значение.

Полученные результаты ясно показывают важность знакомства и использования портфельными управляющими, в том числе служащими Сбербанка, последних, наиболее актуальных результатов в области оптимизации. При этом стоит отметить, что в обширной литературе зачастую соответствующая методология излагается или неточно или с ошибками.

Эта работа содержит достаточно полное руководство по использованию соответствующих техник и может служить руководством по их применению на практике.

Список литературы

[1] T. Cover, Universal Portfolios, Mathematical Finance, V.1., I.1., P. 1-25, (1991)

[2] H. Markowitz, Portfolio Selection, Journal of Finance, V.7., I.1., P. 77-91, (1952)

[3] A. Ben-Tal, A. Nemirovsky, Robust Convex Optimization, Mathematics of operation research, V.23., I.4., P. 769-805, (1998)

[4] M. Rubinstein, Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective, Journal of Finance, V.57., I.3., P. 1041-1045, (2002)

[5] H. Konno, H. Yamazaki, Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market, Management Science, V.37., I.5., P. 519-531, (May, 1991)

[6] A. Perold, Large-Scale Portfolio Optimization, Management Science, V.30., I.10., P. 1143-1160, (Oct. 1984)

[7] W. Sharpe, Capital Assets Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, Journal of Finance, V.19., P. 425-442, (1964)

[8] K. Arrow, Aspects of the Theory of Risk Bearing, Yrjo Jahnsson Lectures [Helsinki: The Yrjo Jahnsson Foundation, 1965])

[9] J. Pratt, Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrica, P. 122-136, (1964)

[10] E. Fama, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, Journal of Finance, V. 25., I. 2., P. 383-417, (May 1970)

[11] E. Fama, K. French, The Equity Risk Premium, Journal of Finance, V. 57., I. 2., P. 637-659, (2002)

[12] R. Ibragimov, Efficiency of linear estimators under heavy-tailedness: Convolutions of alpha-symmetric distributions, Econometric Theory, V. 23., P. 501-517, (2007)

[13] V. Chopra, W. Ziemba, The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice, Journal of Portfolio Management, V. 19., I.2., P. 6-11, (1993)

[14] V. Chopra, C. Helsel, A. Turner, Massaging Mean-Variance Inputs: Returns from Alternative Global Investment Strategies in the 1980s, Management Science, V. 39., I.7., P. 845-855, (July 1993)

[15] J. Skaf, S. Boyd, Multi-Period Portfolio Optimization with Constraints and Transaction Costs, Discussion Paper, 2009

[16] P. Samuelson, Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming, Review of Economics and Statistics, V. 51., P. 239-246, (1969)

[17] G. Dantzig, G. Infanger, Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization, Annals of Operation Research, V. 45., P. 59-76, (1993)

[18] J. Mossin, Optimal Multiperiod Portfolio Policies, The Journal of Business, V. 41., I.2., P. 215-229, (1968)

[19] M. Akian, A. Sulem, M. Taksar, Dynamic optimization of long-term growth ratefor a portfolio with transaction costs and logarithmic utility, Mathematical Finance, V. 11., I.2., P. 152-188, (2001)

[20] H. Liu, M. Loewenstein, Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons, Review of Financial Studies, V. 15., I.3., P. 805-835, (2002)

[21] O. Ledoit, M. Wolf, Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix, Journal of Portfolio Management, V. 30., I.4., P. 110-117, (2004)

[22] S. Kim, K. Koh, S. Boyd, D. Gorinevsky, l_1 Trend Filtering, SIAM Review, problems and techniques section, V. 51. I.2. P. 339–360, (2009).

[23] R. Tibshirani, Regression shrinkage and selection via the Lasso, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, V. 58 (1996), pp. 267–288.

[24] Aron Ben-Tal, Tamar Margalit, Arkadi Nemirovski. Robust Modeling of Multi-Stage Portfolio Problems. pp 303-328 (chapter in book "High perfomance optimization Applied Optimization, Volume 33, 2000)

[25] Aron Ben-Tal, Laurent El Ghaoui, Arkadi Nemirovski. Robust Optimization. 519 p., Princeton University Press, 2009.

[26] Уильям Шарп, Гордон Александер, Джеффри Бэйли, Инвестиции: Пер. с англ. - М.: ИНФРА-М. 2007. - XII. 1028 с.

[27] Irving Fisher. The Nature of Capital and Income. Macmillan, London. 1906.

[28] Harry Markowitz. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Wiley, New York. 1959.

[29] Ю.-Д. Люу. Методы и алгоритмы финансовой математики. Бином, Москва. 2009.

[30] Frank Fabozzi, Petter Kolm, Dessislava Pachamanova, Sergio Focardi. Robust Portfolio Optimization and Management. Wiley, New Jersey. 2007.

[31] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004.

[32] http://moex.com/ru/index/MICEXINDEXCF/info/